

## GUÍA DE ESTUDIO I (COMPUTACIÓN INTERMEDIA)

El objetivo de este documento es servir de guía para el estudiante en preparación para los parciales del curso. Los enunciados marcados con Teorema son fundamentales y hay que conocer sus demostraciones.

(1) *Fundamentos de Álgebra Lineal:*

(a) *Teorema espectral (en dim finita)*

**Teorema 0.1.** *Toda matriz simétrica es ortogonalmente diagonalizable (sobre  $\mathbb{R}$ ).*

Más generalmente toda matriz normal ( $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  es normal  $AA^* = A^*A$ ) es unitariamente diagonalizable (sobre  $\mathbb{C}$ ).

(b) *Descomposición en valores singulares:*

**Teorema 0.2.** *Si  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  entonces existen matrices ortogonales  $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$  y  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y una matriz  $\Sigma$  diagonal con entradas reales tales que:*

$$A = U\Sigma V^T$$

Más precisamente, podemos asumir que las entradas diagonales no nulas de  $\Sigma$  son números  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$  donde  $r = \text{rank}(A)$ . Estos números se llaman los **valores singulares** de  $A$ .

Observaciones:

- La demostración de existencia es constructiva (si pudiéramos calcular valores y vectores propios, lo que haremos más adelante) pues se reduce a que:
  - (i) Las columnas de  $U$  pueden ser una base ortonormal de vectores propios de  $AA^T$  (con  $AA^T u_i = \sigma_i^2 u_i$ ), extendida a una base ortonormal del espacio completo si el rango lo requiere.
  - (ii) Las columnas de  $V$  pueden ser una base ortonormal de vectores propios de  $A^T A$  (con  $A^T A v_i = \sigma_i^2 v_i$ ), extendida a una base ortonormal del espacio completo si el rango lo requiere.
  - (iii) Los valores singulares son las raíces de los valores propios no nulos de  $AA^T$  ó  $A^T A$ . Esto demuestra la unicidad de los valores singulares y también explica en qué sentido falla la unicidad de  $U$  y  $V$ .
- $\Sigma$  es, en general una matrix rectangular del mismo formato que  $A$  y sus únicas entradas no nulas están sobre la diagonal.
- La descomposición de arriba permite, sumando sobre las entradas diagonales, escribir

$$A = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^t$$

expresando  $A$  como suma de  $r$  matrices de rango uno.

- Todo lo anterior es válido sobre  $\mathbb{C}$ , donde  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  y las matrices  $U$  y  $V$  son unitarias, llevando a una descomposición

$$A = U\Sigma V^*$$

## (2) Normas:

- (a) Conocer el enunciado de la desigualdad de Holder y poder usarla para demostrar que  $\|\bullet\|_p$  es norma en  $\mathbb{R}^n$  para  $p \geq 1$ . Saber demostrar:

**Teorema 0.3.** *En un espacio vectorial de dimensión finita, todo par de normas son equivalentes.*

- (b) Normas inducidas en espacios de matrices Definición de la norma inducida sobre operadores  $T : V \rightarrow W$  por normas  $\|\cdot\|_V$  y  $\|\cdot\|_W$  en  $V$  y  $W$

$$\|T\|_{\text{op}} := \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\|Tv\|_W}{\|v\|_V}.$$

Saber demostrar que es norma y que cumple  $\|Tv\|_W \leq \|T\|_{\text{op}}\|v\|_V$ .

- (c) Saber calcular  $\|T\|_{\text{op},1,1}$ ,  $\|T\|_{\text{op},\infty,\infty}$  en términos de las entradas de  $T$  y expresar  $\|T\|_{\text{op},2,2}$  en términos de valores singulares.

## (3) Números de condición y backward stability:

- (a) Saber la definición formal de **número de condición** y de **número de condición absoluto** en un punto  $x \in V$  de una función  $f : V \rightarrow W$  entre espacios normados  $V$  y  $W$  (denotados  $k(x, f)$  y  $\tilde{k}(x, f)$  respectivamente).
- (b) Poder demostrar formalmente que el número de condición de resolver el sistema lineal  $Ax = b$  para  $b$  fijo esta acotado, para una matriz invertible  $A$  por  $k(A) := \|A\|\|A^{-1}\|$ . Si  $\|\bullet\| := \|\bullet\|_{\text{op},2,2}$  poder expresar  $k(A)$  en términos de los valores singulares de  $A$ .
- (c) Entender la definición de backward-stable: Para  $\epsilon_0 > 0$  decimos que  $\tilde{f} : V \rightarrow W$  es  $\epsilon_0$ -backward-stable con respecto a  $f : V \rightarrow W$  si  $\forall x \in V \exists \tilde{x}$  que cumple:

- (i)  $\tilde{f}(x) = f(\tilde{x})$   
(ii)  $\|x - \tilde{x}\| \leq \epsilon_0\|x\|$

- (d) Poder demostrar:

- (i) Que una implementación del producto de números  $x * y$  que garantice

$$x * y = xy(1 + \epsilon_0)$$

para todos  $x, y$  es  $\epsilon_0$ -backward stable.

- (ii) Que el producto interno de vectores en  $\mathbb{R}^n$ , implementado con operaciones de producto y suma como las anteriores es backward-stable para algún múltiplo explícito de  $\epsilon_0$  (para todo  $\epsilon_0$  suficientemente pequeño).

- (iii) *Uso de backward stability:*

**Teorema 0.4.** *Si  $\tilde{f}$  es una implementación  $\epsilon_0$ -backward stable de  $f$  entonces el error relativo en  $x$  esta controlado por el número de condición  $K(x, f)$  de  $f$  en  $x$ . Más precisamente, si  $f(x) \neq 0$  tenemos la siguiente desigualdad*

$$\frac{\|\tilde{f}(x) - f(x)\|}{\|f(x)\|} \leq K(x, f)\epsilon_0$$

- (iv)

**Teorema 0.5.** *Resolver un sistema lineal triangular inferior mediante sustitución hacia atrás es backward-stable.*

Saber la demostración para sistemas  $2 \times 2$  (la idea en general es la misma y solo requiere más cálculos)

(4) *Factorización LU:*

- (a) Saber qué es la factorización  $LU$  de una matriz cuadrada  $A$ .
- (b) Cómo usarías una factorización  $A = LU$  conocida para resolver el sistema  $Ax = b$ ? Qué puedes decir del número de condición y del error relativo de ese algoritmo?
- (c) Demostrar que si  $A$  es invertible y la factorización  $LU$  existe entonces es única. Existe siempre tal factorización? De existir es siempre única (removiendo el requisito de invertibilidad de  $A$ )?
- (d) Calcular la factorización  $LU$  de la matriz  $\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  y notar que el caso  $\varepsilon = 0$  requiere pivoteo. Qué pasa con los números de condición de los factores cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ ?
- (e) *Criterio de existencia útil, sin pivoteo y consecuencias en matrices simétricas* Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz y sea  $A_{\leq p}$  la submatriz cuadrada con índices de filas y columnas  $\leq p$ .

**Teorema 0.6.** Si  $\det(A_p) \neq 0$  para todo  $p$  entonces existe una matriz triangular inferior con diagonal de 1's  $L$  y una matriz triangular superior  $U$  tal que  $A = LU$ .

**Teorema 0.7** (Sylvester + factorización de Cholesky). Si  $A$  es simétrica y  $\det(A_p) > 0$  para todo  $p$  entonces existe una única matriz invertible, triangular inferior  $C$  con entradas positivas en la diagonal que cumple  $A = CC^T$ .

Más generalmente, si  $\det(A_p) \neq 0$  para todo  $p$  y  $A$  es simétrica entonces existe una descomposición  $A = LDL^T$  donde  $L$  es triangular inferior con diagonal de unos y  $D$  es una matriz diagonal.

- (f) Saber que, por Gauss-Jordan, TODA matriz admite una descomposición  $LU$  con pivoteo  $PA = LU$  para alguna permutación  $P$ . *Dato curioso (sin dem.)* para TODA matriz simétrica  $A$  existe una permutación  $P$  tal que  $P^TAP = LDL^T$  donde  $L$  es triangular inferior con unos en la diagonal,  $D$  es diagonal *por bloques* donde todos los bloques tienen tamaño  $2 \times 2$  ó  $1 \times 1$ ). Ejemplo:  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  necesita bloques  $2 \times 2$ .