Simplificación de Máquinas de estado

Def. Si $L \subseteq \Sigma^*$ es un lenguaje este define la siguiente relación de equivalencia en Σ^*

$$x \approx_L y \iff \forall z \in \Sigma^* \left(xz \in L \iff yz \in L \right)$$

Obs: $\approx_L$ es una relación de equivalencia en Σ^* y determina una partición de Σ^* en clases de equiv. disjuntas. Las clases de esta relación no son fáciles de calcular pero están bien definidas.

Ejemplo: $L = (ab \cup ba)^*$

$[\varepsilon] = L$

$[a] = La$

$[b] = Lb$

$[aa] = L(aa \cup bb)\Sigma^*$

y esas son todas las clases.

Si $M = (Q, q_0, \delta, F)$ es un DFA definimos la relación de equivalencia en Σ^* dada por

$$x \sim_M y \iff \exists\, p \in Q : \begin{array}{l} (q_0, x) \vdash_M^* (p, \varepsilon) \text{ y} \\ (q_0, y) \vdash_M^* (p, \varepsilon) \end{array}$$

$x \sim_M y \iff x$ y y llevan a M al mismo estado final.

Lema: $x \sim_M y \implies x \approx_L y$ si $L = L(M)$

Dem: Sea $z \in \Sigma^*$

Suponga $x \sim_M y \Rightarrow \exists\, p \in Q(M): (q_0, x) \vdash (p, \varepsilon)$
$(q_0, y) \vdash (p, \varepsilon)$

$$zx \in L(M) \iff (q_0, zx) \vdash_M^* (f, \varepsilon) \quad \text{para } f \in F.$$

$$\iff (q_0, xz) \vdash_M^* (p, z) \vdash_M^* (f, \varepsilon) \quad f \in F$$

$$\iff (q_0, yz) \vdash_M^* (p, z) \vdash_M^* (f, \varepsilon), \quad f \in F$$

$$\iff yz \in L(M).$$

En un dibujo

Las clases de $\sim_M$ son mucho más sencillas de describir

Lema: Las clases de equivalencia de $\sim_M$ están en correspondencia con los estados de M que pueden alcanzarse desde el estado inicial q_0

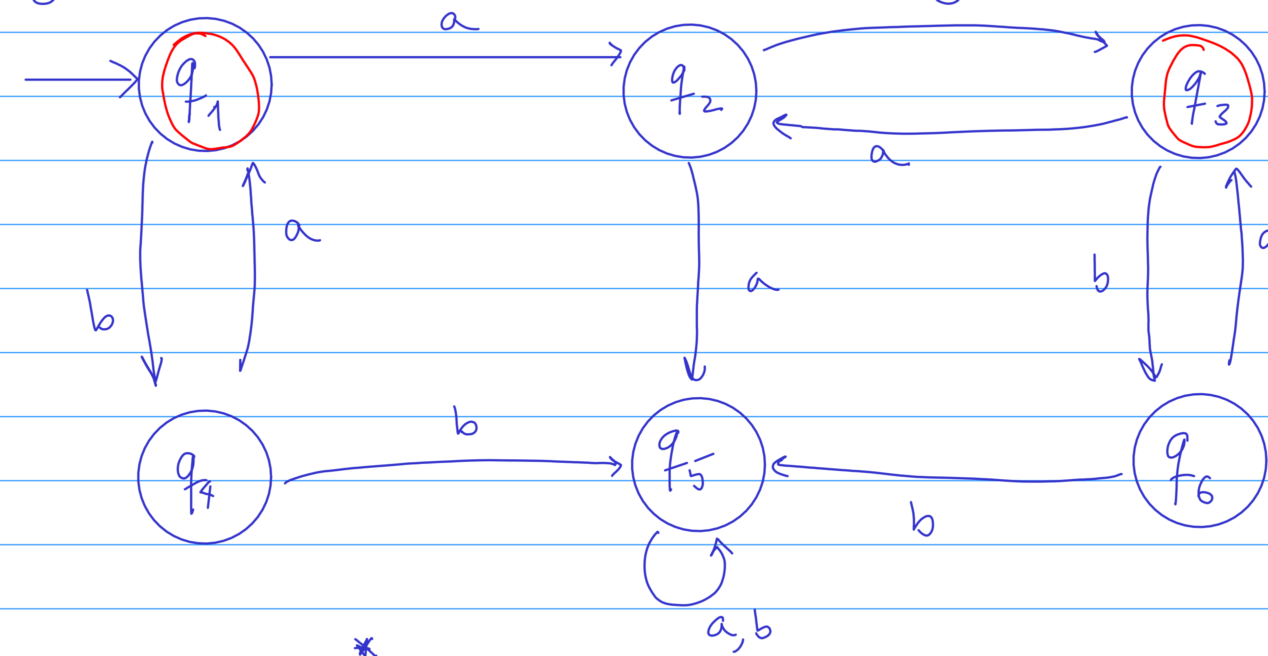
$$E_q = \{ x \in \Sigma^* : (q_0, x) \vdash_M^* (q, \varepsilon) \}.$$

más aún, cada $E_q \subseteq \Sigma^*$ es un lenguaje regular.

Dem: La primera af. es inmediata y la segunda es verdadera pues E_q es el lenguaje aceptado por la máquina con q como único estado de aceptación.

$\bigcirc$ = aceptación

Ejemplo:



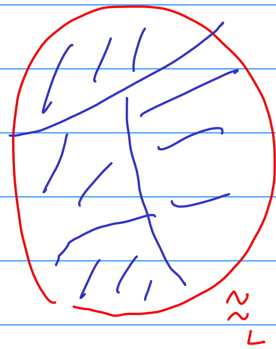
$L = (ab \cup ba)^*$

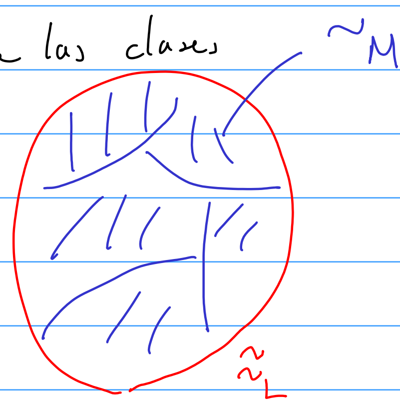
$E_{q_1} = (ba)^*$ ← única manera de llegar de q_1 a q_1

$E_{q_2} = aL$

$E_{q_3} = \ldots$

El dibujo de la relación entre las clases de $\approx_L$ y $\sim_M$ tiene una consecuencia fundamental:





clases de equivalencia de $\approx_L$ $\leq$ # estados de la máquina M con $L(M) = L$

Será que el óptimo puede alcanzarse? Es decir, existe M con $L(M) = L$ y $|Q| = \#$ de clases de equiv de $\approx_L$?

Sí !!

Teorema [Myhill - Nerode] Existe un DFA con $|Q| = \#$ de clases de equiv de $\approx_L$ que acepta a L. Este es el más económico posible.

Dem: Denotamos mediante $[x]_L$ a la clase de equiv de x de acuerdo a $\approx_L$. Y definimos

$$Q := \{ [x]_L : x \in \Sigma^* \}$$

$$q_0 := [\varepsilon]$$

$$F := \{ [x] : x \in L \}$$

$$\delta([x]_L, a) := [xa]_L$$

$$M = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$$

es el autómata óptimo.

Obs: (1) $|Q| < \infty$ porque el número de clases está acotado por el número de estados de cualquier máquina M que acepta a L.

(2) Hay que verificar que δ está bien definido, es decir que si $[x_1]_L = [x_2]_L$ entonces $[x_1 a]_L = [x_2 a]_L$. Esto se sigue de la def de $\approx_L$.

De la construcción hecha en la prueba del Teorema se sigue otra caracterización de lenguajes regulares:

<u>Cor:</u> Un lenguaje $L \subseteq \Sigma^*$ es regular si y solo si $\approx_L$ tiene finitas clases de equivalencia.

<u>Ejemplo:</u> $L = \{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$ NO ES Regular porque $[0^i]_L \neq [0^j]_L$ para $i \neq j$ así que tiene infinitas clases

$$\left.\begin{array}{l} 0^i \cdot 1^i \in L \\ 0^j \cdot 1^i \notin L \end{array}\right\} \Rightarrow [0^i] \neq [0^j].$$

Típicamente mejor método que pumping lemma.

Si queremos construir el autómata de Myhill-Nerode tenemos que calcular $\approx_L$. Usaremos un autómata cualquiera M con $L = L(M)$ y diremos como "unir" las clases de equivalencia E_q y E_r con $q \approx_L r$.

<u>Def:</u> Definimos una relación de equivalencia en $Q(M)$

$$p \sim q \iff \forall z \in \Sigma^* \left(\begin{array}{l} (p,z) \vdash^* (f,\varepsilon) \\ (q,z) \vdash^* (f',\varepsilon) \end{array} \right.$$

$$\underbrace{\text{con } \{f,f'\} \subseteq F \text{ ó } \{f,f'\} \subseteq Q \setminus F}_{} \Big)$$

ambos aceptan ó ambos rechazan AL TIEMPO.

"p y q producen resultados indistinguibles para cualquier input"

Teorema: Para cualquier $x \in \Sigma^*$ tenemos:

$$[x]_L = \bigsqcup_{r \in [p]_\equiv} E_r$$

donde p es el estado después por

$$(q_0, x) \vdash^* (p, \varepsilon)$$

celdas indistinguibles

unimos sobre estados equivalentes

$E_p = [x]_{\sim M}$

celdas de $\sim_M$

Dem:

$y \in E_r$ y $r \equiv p$ entonces

$$(q_0, xz) \vdash^* (p, z) \vdash^* (f, \varepsilon)$$
$$(q_0, yz) \underbrace{\vdash^*}_{y \in E_r} (r, z) \vdash^* (f', \varepsilon)$$

$\{f, f'\} \subseteq F$ ó $\{f, f'\} \subseteq Q \setminus F$

overall $x \approx_{L(M)} y$ así que "$\supseteq$" ✓

"$\subseteq$" Si $x \approx_{L(M)} y$ $\quad r :=$ el estado tal que $(q_0, y) \vdash^* (r, \varepsilon)$

entonces $\forall z \ (xz \in L(M) \iff yz \in L(M))$

es lo mismo que $\forall z \quad (r, z) \vdash (f, \varepsilon)$
$\qquad (p, z) \vdash (f', \varepsilon)$

con $\{f, f'\} \subseteq F$ ó $\{f, f'\} \subseteq Q \setminus F$

al mismo tiempo.

Obs: $p \equiv q$ puede calcularse como límite de $p \equiv_n q$ donde

$$p \equiv_n q \iff \forall z \left(|z| \le n \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Si } f, f' \text{ satisfacen} \\ (p, z) \vdash^* (f, \varepsilon) \\ (q, z) \vdash^* (f', \varepsilon) \\ \text{entonces } \{f, f'\} \subseteq F \text{ ó } \{f, f'\} \subseteq Q \setminus F \end{array} \right)$$

Lema: $p \equiv_n q \iff p \equiv_{n-1} q$ y $\forall a \in \Sigma$

$$\delta(p, a) \equiv_{n-1} \delta(q, a)$$

Así que se puede calcular $\equiv_n$.