Teorema: Para toda $\mathcal{G} = (V, \Sigma, R, S)$ gramática CFG existe PDA $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s)$ con $L(\mathcal{G}) = L(M)$

Haremos una demostración rigurosa para enfatizar como se escribe este tipo de prueba.

Recuerde que $x, y \in V^*$ están relacionadas por "Left-derivation"

$x \overset{L}{\Rightarrow} y$ (1-paso) $\iff \exists\ w \in \Sigma^*,\ \beta, \gamma \in \Gamma^*,\ A \to \gamma \in R$ con

$x = wA\beta \qquad y = w\gamma\beta$

$x \overset{L^*}{\Rightarrow} y \iff \underbrace{x = u_0 \overset{L}{\Rightarrow} \cdots \overset{L}{\Rightarrow} u_n = y}_{n\text{-pasos}}$

Dem. Dado $\mathcal{G}$ considere el PDA $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$ con $K = \{p, q\}$, Σ, $\Gamma = V$, $s = p$, $F = \{q\}$ con transiciones Δ dados por:

$[(p, \varepsilon, \varepsilon), (q, S)]$

($A \to x$) en stack $\to$ ② $[(q, \varepsilon, A), (q, x)]$ siempre que $A \to x$ regla de R

Borra símbolos terminales a izquierda. $\to$ ③ $[(q, a, a), (q, \varepsilon)]$ Para $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$

Mostraremos la siguiente afirmación mucho más fuerte:

Af: Si $w \in \Sigma^*$, $\alpha \in (V \setminus \Sigma) \cdot V^* \cup \{\varepsilon\}$
$S \overset{L^*}{\Rightarrow} w\alpha \iff (q, w, S) \vdash_M^* (q, \varepsilon, \alpha)$

"$\Rightarrow$" Demostraremos por inducción en el número de pasos $\overset{L}{\Rightarrow}$ para pasar de S a $w\alpha$.

(Base) $S \overset{L}{\Rightarrow} w\alpha \iff x = S,\ y = w\alpha,\ S \to w\alpha \in R$

$(q, w, S) \underset{[(q, \varepsilon, S), (q, w\alpha)]\ ②}{\vdash} (q, w, w\alpha) \vdash (q, \varepsilon, \alpha)$ ✓

Borro w's ③

(Ind) $[S = u_0 \overset{L}{\Rightarrow} \cdots \overset{L}{\Rightarrow} u_\ell] \overset{L}{\Rightarrow} u_{\ell+1}$

Suponga que $u_{\ell+1} = w\alpha \quad w \in \Sigma^*,\ \alpha \in (V \setminus \Sigma) \cdot V^*$

Si $u_\ell \Rightarrow u_{\ell+1} \Rightarrow \exists\ v \in \Sigma^*,\ \gamma, \beta \in V^*$ y $A \to \gamma \in R$

con $u_\ell = vA\beta \quad u_{\ell+1} = v\gamma\beta$.

El primer símbolo de $\alpha \notin \Sigma^*$ luego v debe estar contenida en w

$w = vz \in \Sigma^*$. Reemplazando obtenemos

$u_\ell = vA\beta \ , \ u_{\ell+1} = v\gamma\beta = vz\alpha \implies \boxed{\gamma\beta = z\alpha}$

Por hip de inducción sabemos que

$(q, v, S) \vdash (q, \varepsilon, A\beta)$ luego

$(q, w, S) = (q, vz, S) \vdash (q, z, A\beta) \vdash (q, z, \gamma\beta)$

2 $\quad \overset{(1)}{=} (q, z, z\alpha)$

3 $\quad \overset{T}{\vdash} (q, \varepsilon, \alpha)$

Recíprocamente,

Asumimos que $(q, w, S) \vdash_M^* (q, \varepsilon, \alpha)$ y queremos verificar que $S \overset{L}{\Rightarrow}{}^* \alpha$ por inducción en el número de veces que usamos transiciones del tipo 2.

Si usamos una sola transición, esta debe ser con una regla del tipo $S \to \alpha$ con α terminal

así que $(q, w, S) \vdash (q, w, \alpha)$

Si el primer símbolo de w coincide con el primero de α (si no contradicción)

se puede cancelar y así sucesivamente hasta que $w = \varepsilon$ luego $\alpha = w\alpha'$

Concluimos: $S \Rightarrow \alpha = w\alpha'$

Paso inductivo:

$(q, w, S) \vdash (q, \varepsilon, \alpha)$

$(q, w_1, S) \vdash (q, \varepsilon, \tilde{\alpha})$ $\quad (q, \tilde{w}, \tilde{\alpha}) \vdash (q, \tilde{w}, \gamma\beta)$ 3

$w = w_1\tilde{w}$ $\quad \tilde{\alpha} = A\beta$

Hip. de inducción $\quad$ uso adicional regla tipo 2

$S \overset{L}{\Rightarrow} w_1\tilde{\alpha} = w_1 A\beta \Rightarrow w_1\gamma\beta = w_1\tilde{w}\alpha = w\alpha$

Como $(q, \tilde{w}, \gamma\beta) \vdash (q, \varepsilon, \alpha)$ solo necesita transiciones del tipo 3 tenemos $\gamma\beta = \tilde{w}\alpha$

Demostrado lo que queríamos.