

# Práctico ALGABO: El algoritmo de Dijkstra de caminos más cortos con pesos no negativos.

Mauricio Velasco

1. Sea  $G$  un grafo dirigido con pesos no negativos  $\ell \geq 0$  en las aristas y sea  $t$  un vértice de  $G$ :
  - a) Proponga una variante del algoritmo de Dijkstra para calcular las distancias **hasta**  $t$ , es decir los valores  $d_\ell(v, t)$  para  $v \in V(G)$ .
  - b) Demuestre formalmente que su algoritmo es correcto (es decir escriba un enunciado de Teorema claro y una demostración del mismo).
2. Implemente el algoritmo de Dijkstra en python dos veces, una vez usando un `priority_queue` o `heap` (por ejemplo usando `import heapq`) y la segunda vez sin usar esta estructura de datos especial.
  - a) Escriba el código de sus dos implementaciones.
  - b) Ejecute sus algoritmos en el ejemplo [M3] y escriba en qué orden se incluyen los vértices en el conjunto  $X$  definido en clase.
  - c) Ejecute sus implementaciones en ejemplos contruidos por uds. de grafos grandes y lleve sus implementaciones hasta el límite. Es cierto en la práctica que usar el heap es mejor que no usarlo? Explique en palabras qué ejemplos de grafos utilizó y escriba una tabla reportando los tiempos de cómputo de ambas implementaciones en sus ejemplos.
3. Decida si la siguiente afirmación es Verdadera o Falsa. En el primer caso escriba una demostración y en el segundo encuentre un contraejemplo: *Suponga que el algoritmo de Dijkstra iniciando en  $s$  inserta los vértices de  $V(G)$  en el conjunto  $X$  (definido en clase) en orden  $s = v_0, v_1, \dots, v_n$ . Si  $i < j$  entonces  $d_\ell(s, v_i) \leq d_\ell(s, v_j)$ .*
4. Sea  $G$  un grafo dirigido con pesos no negativos y sea  $s$  un vértice fijo dado. Defina el costo-especial de un camino  $P$  como

$$b(P) = \text{Máxima longitud } \ell \text{ de una arista de } P$$

y para dos vértices  $s$  y  $v$  defina la distancia-especial  $m(s, v)$  como

$$m(s, v) = \text{mín}\{b(P) : P \text{ es un camino desde } s \text{ hasta } v \text{ en } G\}$$

- a) Calcule  $m(s, v)$  para todo  $v \in V$  para el grafo [M3] de clase.
- b) Proponga una variante del algoritmo de Dijkstra para calcular las distancias especiales  $m(s, v)$  para  $v \in V(G)$ .
  - 1) Demuestre la validez del algoritmo que propone (es decir escriba un enunciado de Teorema de validez claro y una demostración del mismo).
  - 2) Proponga una implementación que corra en tiempo  $O(mn)$  o mejor, justificando de manera precisa su cálculo del tiempo de ejecución.

5. Sea  $G$  un árbol binario. Demuestre las siguientes afirmaciones:

- a) Si  $G$  tiene los primeros  $q$  niveles completamente llenos entonces tiene  $2^q - 1$  vértices.
- b) Ponemos las entradas de un arreglo de longitud  $n$  llenando un árbol binario de izquierda a derecha (note que es posible que el último nivel del árbol no quede completamente lleno). Muestre que el número de niveles del árbol es  $\Theta(\log(n))$  donde  $\log$  denota el logaritmo natural (en base  $e$ ) de  $n$ .