El algoritmo A^*:

Problema: Sea G un grafo con pesos positivos en las aristas $\ell: E(G) \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ y sea T una colección de vértices de salida marcados. Iniciando en un vértice s queremos saber cómo alcanzar algún vértice de salida $t \in T$ con el mínimo costo posible?

Más precisamente queremos resolver el problema

$$f^* = \min_{v \in T} \left[\delta(s,v) \right]$$

dónde $\delta(s,v) = \min \{ \ell(P) : P \text{ es un camino de } s \text{ a } v \}$.

El algoritmo A^* nos permite encontrar una solución ÓPTIMA a este problema usando menos tiempo de búsqueda que Dijkstra SI DISPONEMOS DE UNA HEURÍSTICA ADMISIBLE.

Def: Una heurística es una función $h: V(G) \longrightarrow \mathbb{R}$. (intuitivamente $h(v)$ es una "aproximación" para el costo total del problema iniciando en el vértice v)

Una heurística admisible es una función $h: V(G) \longrightarrow \mathbb{R}$ que estima el costo por debajo, es decir que cumple

$$h(x) \leq \min_{v \in T} h(x,v)$$

para todo vértice $x \in V(G)$.

Algoritmo A^* en pseudocódigo: (con heurística h)

$X \leftarrow$ Set() Contendrá parejos (valor, vértice)

$Q \leftarrow$ priority Queue()

$\varphi \leftarrow$ map() $\leftarrow$ Estimados $\varphi(v)$ del costo mínimo de s a v

previous $\leftarrow$ map() $\leftarrow$ Recordará decisiones óptimas

\# Inicialización:

$$\begin{array}{c|cccccc} & s & v_2 & v_3 & \cdots & v_N \\ \varphi & [0 & \infty & \infty & & \infty] \\ \text{prev} & [\text{NULL} & \text{NULL} & \cdots & & \text{NULL}] \end{array}$$

} vértices de G

$X = \{\}$

Q.insert((0, s))

\# Ejecución:

```
while not Q.empty:
        u ← Q.extract_min()
        X ← X ∪ {u}
        if u ∈ T:
            return (Reconstruct_path (prev , s, u))
        else:
            for v ∈ u.neighbors()
                    alt = φ[u] + ℓ(u,v)
                    if alt < φ[v]
                        φ[v] = alt
                        f = φ[v] + h(v)
                        Q.insert((f, v))
                        prev[v] = u
```

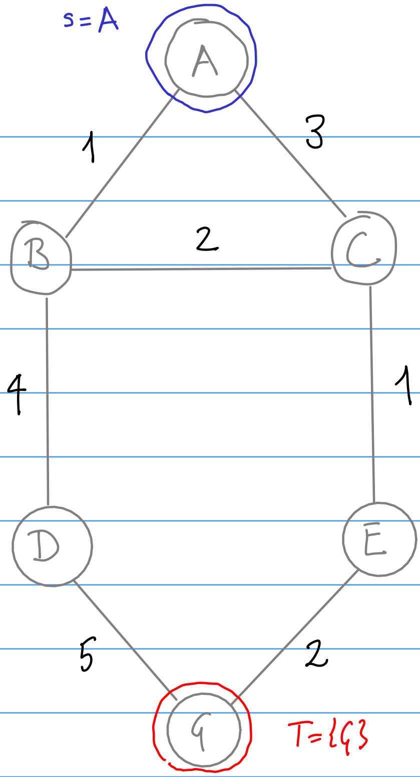
Sigue la función prev iterativamente desde u hasta s y retorna la lista reversada de aristas.

heurística

Estima el costo de la mejor ruta que pasa por v

f-valor
f[v]

Ejemplo



Obs: A^* coincide con Dijkstra cuando $h=0$

Ejercicio: Utilice A^* para resolver el problema con las siguientes dos heurísticas:

(a)
$$h_1(x) = \begin{cases} 5, & \text{si } x = D \\ 0, & \text{d.l.c.} \end{cases}$$

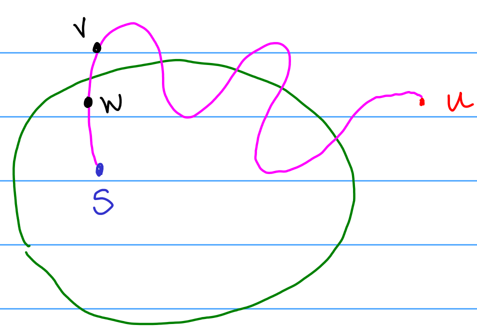
(b)
$$h_2(x) = \begin{cases} 100, & \text{si } x = C \\ 0, & \text{d.l.c.} \end{cases}$$

Verifique que: - h_1 es admisible y que nos permite encontrar el óptimo y - h_2 NO ES admisible y el algoritmo termina escogiendo un camino que NO ES óptimo

Demostraremos que A^* con una heurística admisible lleva a una solución óptima del problema.

Definimos $O := V(G) \setminus X$

Lema: $\forall u \in O$ y todo camino δ-óptimo P de s hasta u existe $v \in P$, $v \in O$ adyacente en P a algún $w \in X$ con $\varphi[v] = \delta(s,v)$. Es decir



con $\varphi[v] = \delta(s,v)$

Depura

Dem: $\Delta := \left\{ n \in X : \begin{matrix} n \in P \\ \varphi[n] = \delta(s,n) \end{matrix} \right\}$

entonces $s \in \Delta$ (luego $\Delta \neq \emptyset$)
$u \notin \Delta$ (pues $u \notin X$)

así que existe un índice mínimo v a lo largo de P en el que salimos de Δ y sea w el vértice $\in X$ inmediatamente anterior. Como $w \in X$ sabemos que para todos los vecinos y en particular para v se cumple que

$$\varphi[v] \leq \varphi[w] + \ell(w,v)$$
$$\overset{w \in \Delta}{=} \delta(s,w) + \ell(w,v)$$
$$\overset{P \text{ es } \delta\text{-óptimo.}}{=} \delta(s,v)$$

Como $\varphi[v] \geq \delta(s,v)$ siempre, se tiene la igualdad.

Lema: Asuma que h es una heurística admisible. Para todo camino óptimo P de s a algún nodo $t \in T$ $\exists\, v \in O$ con $f(v) \leq f^*$

Dem: Por el lema anterior existe $v \in P$, $v \in O$ con $\varphi[v] = \delta(s,v)$. De aquí:

$$f[v] = \varphi[v] + h[v] = \delta(s,v) + h(v) \overset{\text{heurística admisible}}{\leq}$$

$$\leq \delta(s,v) + \min_{a \in T} \delta(v,a) \overset{\text{optimalidad de } P}{=} \delta(s,v) + \delta(v,t) = f^*$$

Teorema [validez de A^*] Una heurística admisible siempre lleva a que A^* termine con un camino óptimo.

Dem: Por el lema anterior en cualquier instante hay escogencias válidas con $f \leq f^*$ en el Q.
Si el algoritmo termina de manera no óptima es porque sacó un nodo terminal t^* que tiene mínimo $f[t^*] = \varphi[t^*] + \overbrace{h[t^*]}^{0}$
luego $\varphi[t^*] > f^*$
Según el lema anterior $\exists$ $v \in Q$ con $f[v] < f^*$ en el paso anterior en Q lo cual es una contradicción.

Obs: Para construir heurísticas admisibles necesitamos cotas inferiores para

$$\min_{t \in T} \left[\delta(v,t) \right]$$

Por ejemplo