Caminos más cortos CON PESOS NEGATIVOS:

El algoritmo de Dijkstra es MUY EFICIENTE $O((m+n)\log(n))$ pero requiere que los pesos $\ell(u,v) \geq 0 \ \forall (u,v) \in E(G)$.

Qué hacer si los pesos son negativos? Problemas como este aparecen naturalmente en finanzas, en situaciones en las que un activo está "en corto" es decir en cantidad negativa (log de las tasas de conversión entre monedas por ejemplo)

VAMOS A CONSIDERAR EL SIGUIENTE PROBLEMA:
Sea G un grafo finito con pesos ARBITRARIOS $\ell: E(G) \to \mathbb{R}$ y $s \in V(G)$ fijo.

$$\varphi(\underset{k \in \mathbb{N}}{k}, \overset{\in V(G)}{v}) := \min \left\{ \ell(P) : \begin{array}{l} P \text{ es un camino de } s \text{ hasta } v \\ \text{usando } \leq k \text{ aristas de } G \end{array} \right\}$$

Esto resuelve el problema porque:

Lema: (1) Si $\varphi(k,v) = \varphi(k+1,v) \ \forall v \in V(G)$ entonces

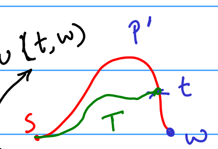
$$\varphi(k,v) = \min \left\{ \ell(P) : \begin{array}{l} P \text{ es un camino} \\ \text{de cualquier longitud} \\ \text{de } s \text{ hasta } v \end{array} \right\}$$

ciclos negativos

(2) Si G NO TIENE ciclos P con $\ell(P) < 0$ entonces $\varphi(n-1,v) = \varphi(n,v) \ \forall v \in V(G)$

Dem: (1) Si hay un camino de s a w con $k+2$ aristas y $\ell(P) < \varphi(k,w)$

$P = P' \cup \{t,w\}$



última arista

P' tiene $\leq k+1$ aristas

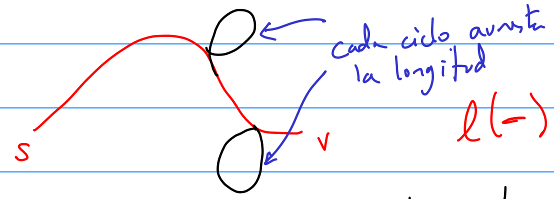
$$\ell(P') \geq \varphi(k+1,t) = \underbrace{\varphi(k,t)}_{\text{testigo } T}$$

$$\ell(\overbrace{\underbrace{T}_{k \text{ aristas}} \cup \{t,w\}}^{k+1 \text{ aristas}}) = \ell(T) + \ell(t,w) \leq \ell(P) < \varphi(k,w)$$

nuevo camino con $k+1$ aristas

Contradicción!

(2) Si G no tiene ciclos negativos todo camino óptimo carece de ciclos



$\ell(-) \leq \ell(-) + \ell(\text{ciclos})$

y en particular no repite vértices luego tiene $\leq n$ vértices y al ser un camino $\leq n-1$ aristas.

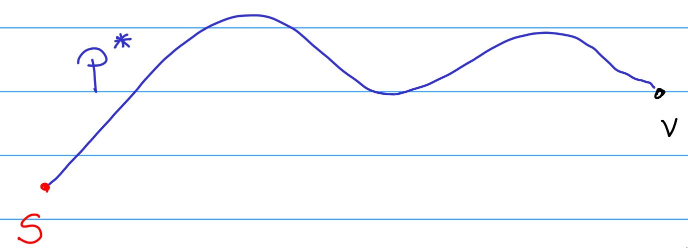
Así que calculamos $\varphi(n-1,v)$ y $\varphi(n,v)$ $\forall v \in V$ y hay dos casos:

(1) $\forall v \left[\varphi(n-1,v) = \varphi(n,v)\right] \Rightarrow \varphi(n-1,v) = d_\ell(s,v)$ ✓

ó

(2) $\exists v \left[\varphi(n-1,v) \neq \varphi(n,v)\right] \Rightarrow G$ tiene un ciclo negativo (a lo largo del camino óptimo de $\varphi(n,v)$)

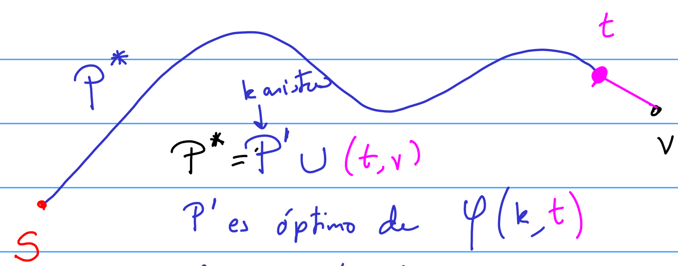
Cómo calcular $\varphi(n,v)$? Una vez más programación dinámica:



Si P^* es un camino óptimo de s a v de longitud $\leq k+1$ qué propiedades tiene? (P^* óptimo de $\varphi(k+1,v)$)

<u>Caso 1:</u> $|P^*| \leq k \Rightarrow P^*$ es óptimo de $\varphi(k,v)$

<u>Caso 2:</u> $|P^*| = k+1$, t vértice anterior a v



$P^* = P' \cup (t,v)$

P' es óptimo de $\varphi(k,t)$

$\ell(P') = \varphi(k,t)$

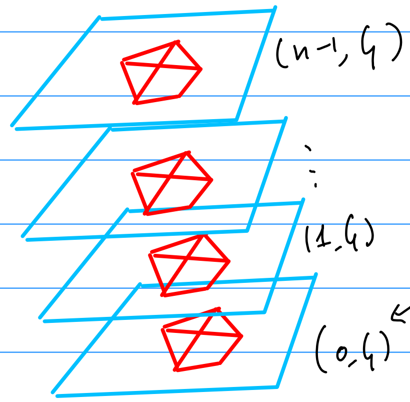
luego $\ell(P^*) = \ell(P') + \ell(t,v) = \varphi(k,t) + \ell(t,v)$

para algún t adyacente a v.

Ecuación de Bellman:

$$\varphi(k+1,v) = \min \begin{cases} \varphi(k,v) \\ \min\limits_{t\in In(v)} \{\varphi(k,t) + \ell(t,v)\} \end{cases}$$

Estados del problema:



Hemos descubierto el **Algoritmo de Bellman-Ford**

Base: Cuando $k=0$

$$\varphi(k,v) = \begin{cases} \infty, & v \neq s \\ 0, & v = s \end{cases}$$

Complejidad: En cada piso hacemos $n+m$ operaciones

en total $\leq n(n+m) = O(nm)$.

Remark: Hay un algoritmo reciente 2023 mucho más rápido. Buscar en Google:

"Quanta magazine shortest path negative weights"

En muchas aplicaciones queremos calcular $d_\ell(a,b)$ para TODA pareja (a,b) y no solo fijando $a = s$

¿Qué hacer?

Idea 1: Bellman Ford n veces?

$O(n^2 m)$ ($O(n^4)$ no muy bueno)

Idea 2: Programación Dinámica:

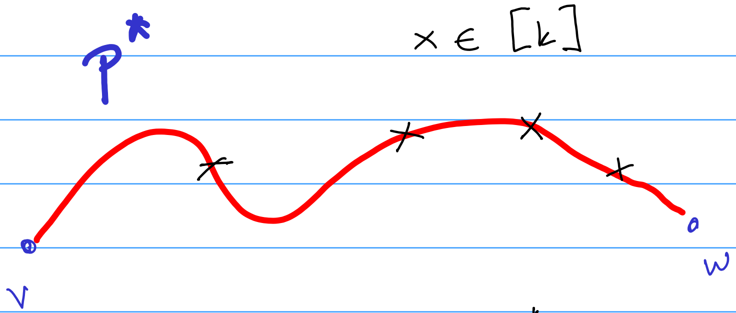
$$\underbrace{\psi(\{1,2,\dots,k\}, v, w)}_{\psi_{k,v,w}} = \min \left\{ \ell(P) : \begin{array}{l} \text{- } P \text{ camino} \\ \text{- } P \text{ inicia en } v \\ \text{- } P \text{ termina en } w \\ \text{- } P \text{ usa como vértices internos solo vértices en } \{1,2,..,k\} \end{array} \right\}.$$

Queríamos calcular $\mathcal{H}([n], v, w)$ para todo v, w

$(\mathcal{H}_{n,v,w})_{v,w}$ ← matriz de distancias

Sea P^* un camino óptimo de $\mathcal{H}_{k,v,w}$

$x \in [k]$

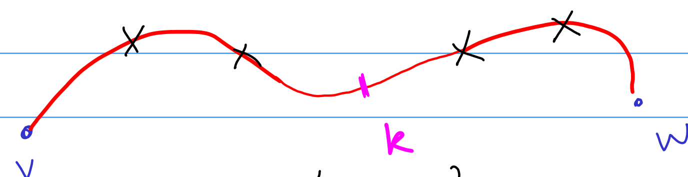


Caso 1: $k \notin$ vértices internos de P^*

P^* es óptimo para $k-1$

$$\ell(P^*) = \mathcal{H}(k-1, v, w)$$

Caso 2: $k \in$ vértices internos de P^*



$x \in \{1, .., k-1\}$

$$\ell(P^*) = \mathcal{H}(k-1, v, k) + \mathcal{H}(k-1, k, w)$$

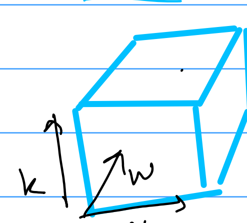
Llegamos así a una

Ecuación de Bellman.

$$\mathcal{H}_{k,v,w} = \min \begin{cases} \mathcal{H}_{k-1,v,w} \\ \mathcal{H}_{k-1,v,k} + \mathcal{H}_{k-1,k,w} \end{cases}$$

Hemos encontrado el algoritmo de Floyd-Warshall

Estados:



Para k fijo, el lado derecho tiene una cantidad constante de términos luego $O(n^3)$