

Práctico TEOCOMP: Dividir y Conquistar

Mauricio Velasco

1. (*Conteo de inversiones*)

- a) Escriba su implementación en `python` de un algoritmo que retorne el número de inversiones de una lista de enteros calculados por fuerza bruta.
- b) Demuestre que la complejidad en tiempo del algoritmo de la parte (a) es $O(n^2)$.
- c) Escriba su implementación en `python` del algoritmo recursivo para calcular el número de inversiones.
- d) Produzca una tabla comparando los tiempos de ejecución de sus dos algoritmos para la permutación descendente $n, n - 1, n - 2, \dots, 1$ para $n = 100, 1000, 10000, 100000$.

2. (*Multiplicación de Matrices*)

- a) Escriba el código de una función que implemente el producto de dos matrices $n \times n$ usando la definición aprendida en su curso de álgebra lineal.
- b) Demuestre rigurosamente que la complejidad en tiempo de su implementación es $O(n^3)$.
- c) Explique por qué es imposible que haya un algoritmo de multiplicación de matrices con time complexity $O(n)$.
- d) Demuestre que $P_5 + P_4 - P_2 + P_6 = AE + BG$ en el algoritmo de Strassen visto en clase.
- e) Aplique a mano el algoritmo de Strassen utilizándolo para calcular

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} =$$

3. Escriba cuidadosamente el enunciado del Teorema Maestro. Posteriormente aplíquelo para encontrar cotas para las funciones que que cumplan las siguientes desigualdades recursivas.

a) $T(n) \leq 7T(n/3) + O(n^2)$

b) $A(n) \leq 9A(n/3) + O(n^2)$

c) $B(n) \leq 5B(n/3) + O(n)$

4. Suponga que una función satisface la desigualdad $T(n) \leq T(\lfloor \sqrt{n} \rfloor) + 1$ para $n > 1$.

a) Cuál de las siguientes clases contiene a $T(n)$? ($O(1)$, $O(\log \log(n))$, $O(\log(n))$, $O(\sqrt{n})$).

b) De una demostración de su respuesta al ítem anterior.