Práctico 3 TEOCOMP: Complejidad Computacional.

Mauricio Velasco

1. Demuestre formalmente que el siguiente problema de decisión esta en la clase de complejidad P: *Dado un grafo G con costos en las aristas y un entero h, existe un árbol generador de G con costo $\leq h$?*

2. Demuestre las siguientes afirmaciones sobre lenguajes $L \subseteq \{0,1\}^*$:

   a) Si $L_1, L_2 \in P$ entonces $L_1 \cap L_2 \in P$
   b) Si $L_1 \in P$ entonces el complemento $\{0,1\}^* \setminus L_1 \in P$
   c) Si $L_1, L_2 \in NP$ entonces $L_1 \cap L_2 \in NP$

3. Sea G un grafo no dirigido. Un conjunto $I \subseteq V(G)$ es independiente si $\forall a, b \in I$ tenemos que $(a,b) \notin E(G)$. Demuestre formalmente que el siguiente problema de decisión esta en la clase de complejidad NP: *Dado un grafo G y un entero p, existe un conjunto independiente con por lo menos p vértices de G?*

4. Demuestre que si $L \in NP$ entonces L puede decidirse mediante un algoritmo que corre en tiempo $O(2^{n^k})$ para alguna constante k (que depende de L).

5. Demuestre que la relación $L_1 \preceq_P L_2$ es transitiva en lenguajes. Es decir que $L_1 \preceq_P L_2$ y $L_2 \preceq_P L_3$ implica $L_1 \preceq_P L_3$.

6. Un VERTEX COVER de un grafo G es u subconjunto $V' \subseteq V(G)$ tal que para todo $(u,v) \in E(G)$ tenemos que $u \in V'$ ó $v \in V'$ (o ambas). Es decir V' es una colección de vértices que toca todas las aristas de G. El problema de decisión VERTEX-COVER consiste en decidir si dado un grafo G y un entero p existe un vertex cover de G de tamaño p. En este problema estudiaremos la complejidad de VERTEX COVER:

   a) Demuestre formalmente que VERTEX COVER esta en la clase de complejidad NP (es decir, proponga un certificado y un algoritmo de verificación y demuestre que la verificación ocurre en P).

b) Demuestre que un subconjunto $V' \subseteq V(G)$ es un CLIQUE si y sólo si $V \setminus V'$ es un vertex cover del grafo complemento $\overline{G}$ (el grafo complemento $\overline{G}$ se define como el grafo con los mismos vértices que G y aristas complementarias a las de G (es decir, $(u, v) \in E(\overline{G})$ si y solo si $(u, v) \notin E(G)$ y $u \neq v$).

c) Utilice la parte anterior para construir una reducción polinomial $[CLIQUE] \preceq_P [VERTEX - COVER]$.

d) Use los puntos anteriores para concluir que VERTEX COVER es un problema NP Completo.