Más ejemplos de problemas NP-completos

La clase anterior vimos que [CLIQUE] es NP-completo, donde

[CLIQUE]: Dado un grafo G y un entero q, ¿Hay un subgrafo completo de G con $\geq q$ vértices?

Demostramos que $[3\text{-SAT}] \leq [\text{CLIQUE}]$ y que $[\text{CLIQUE}] \in NP$

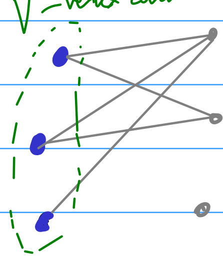
Reducción polinomial.

Hoy analizaremos otros problemas con esa misma técnica:

[VERTEX-COVER] ¿Dado un grafo G y un entero q, existe un vertex-cover de G con $\leq q$ vértices?

Es un conjunto $V' \subseteq V(G)$ tal que $\forall\ (a,b) \in E(G)$
$a \in V'$ ó $b \in V'$

V' - vertex cover (queremos los más pequeños posible)

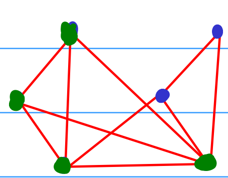


Def: Si G es un grafo definimos su grafo complemento $\overline{G}$ así
$V(\overline{G}) = V(G)$
$(a,b) \in E(\overline{G}) \iff a \neq b$ y $(a,b) \notin E(G)$

Lema: V' es un vertex-cover de $G \iff V \setminus V'$ es un clique de $\overline{G}$

Dem: "$\Rightarrow$" Suponga $b \neq c$ y $b, c \in V \setminus V'$. $(b,c) \notin E(G)$ pues de lo contrario V' no sería un vertex cover así que $(b,c) \in E(\overline{G})$

"$\Leftarrow$" Suponga que $e \in E(G)$ $e = (a,b)$ y que ni a ni $b \in V'$ $\Rightarrow$ $(a,b) \notin E(\overline{G})$ luego a,b no es clique.



Calculamos $\overline{G}$ para el grafo anterior y el complemento de un clique es un vertex cover.

Lema: [CLIQUE] $\leq$ [VERTEX-COVER]

Dem: Dados $\langle G \rangle, \langle p \rangle$:

(1) Calculamos $\langle \overline{G} \rangle$

(2) Calculamos $n-p$

(3) Preguntamos: Existe un vertex-cover de $\overline{G}$ con $\leq n-p$ vértices?

$$\boxed{\langle G,p \rangle \xrightarrow{f} \langle \overline{G}, n-p \rangle}$$

Por el lema anterior $\langle G,p \rangle \in$ [CLIQUE] $\Leftrightarrow$ $\langle \overline{G}, n-p \rangle \in$ [VERTEX-COVER]

Adicionalmente es fácil ver que [VERTEX-COVER] $\in \mathcal{NP}$ usando los vértices escogidos $y := \langle V' \rangle$ como certificado. Concluimos que [VERTEX-COVER] es NP-completo.

$*$ Se puede demostrar que [HAMILTONIAN-CYCLE] $\geq$ [VERTEX-COVER] y como [HAMILTONIAN-CYCLE] $\in \mathcal{NP}$ este es NP-Completo.

② Un ejemplo que no involucra grafos:

[SUBSET-SUM] Dada una sucesión $S = (e_1, \ldots, e_N)$ de enteros y otro entero t ¿existe $T \subseteq S$ con

$$\sum_{e_i \in T} e_i = t \quad ?$$

Demostremos que [3-SAT] $\leq$ [SUBSET-SUM]. Dado que [SUBSET-SUM] $\in \mathcal{NP}$ concluimos que [SUBSET-SUM] es NP-completo.

La reducción es fácil de entender con un ejemplo

(ver página siguiente.)

Ej $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$

Produciremos unos enteros en base 10 cuyas sumas se hagan "sin llevar" permitiéndonos codificar sumas de vectores con ellos:

2 por cada variable

	x_1	x_2	x_3	C_1	C_2	C_3	C_4	
V_1	1	0	0	1	0	0	1	← x_1 positiva
V_1'	1	0	0	0	1	1	0	← x_1 negativa
V_2								
V_2'								
V_3								
V_3'								
S_1	0	0	0	1	0	0	0	slack variables
S_1'	0	0	0	2	0	0	0	
t	1	1	1	4	4	4	4	

cláusulas válidas si escogemos x_i ó $\bar{x}_i$ (en V_i, V_i' resp.)

2 por cada cláusula

target

asegura que toda variable o su negación sean escogidas

$$f \begin{cases} S(\varphi) := (V_1, V_1', \dots, V_3, V_3', S_1, S_1', \dots, S_4, S_4') \\ t(\varphi) := t \end{cases}$$

$S(\varphi), t(\varphi) \in$ [SUBSET-SUM] $\iff \varphi \in$ [3-SAT].

luego [3-SAT] $\xrightarrow{f}$ [SUBSET-SUM] es una reducción (y es fácil ver que es polinomial).